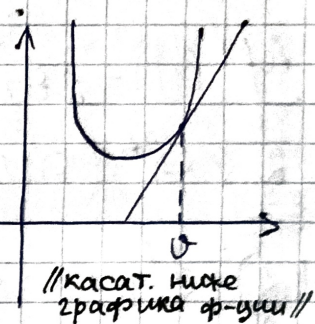


$\Downarrow$ III.3 (о касательной п-ти) $\square$ $\mathcal{U}$ — вып. из H — игоб, $\overline{11/03}$
 $\mathcal{Y}(u)$ вып. на $\mathcal{U}$, дифф-ма в т. v из $\mathcal{U} \Rightarrow$ (III.1) $\mathcal{Y}(u) \geq \mathcal{Y}(v) + \langle \mathcal{Y}'(v), u-v \rangle, \forall u \in \mathcal{U}$



$\Downarrow$ III.4 (— // — д/сил. вып. ф-ции) $\square$ $\mathcal{U}$ — вып. в H , $\mathcal{Y}(u)$ — сил. вып. на $\mathcal{U}$ и дифф. в

в т. $v \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists \mu > 0$: (III.2) $\mathcal{Y}(u) \geq \mathcal{Y}(v) + \langle \mathcal{Y}'(v), u-v \rangle + \frac{1}{2} \mu \|u-v\|^2$ // Док-во по опр-нию //

$\blacktriangle \frac{1}{2} \alpha(1-\alpha) \|u-v\|^2 \leq \alpha \mathcal{Y}(u) + (1-\alpha) \mathcal{Y}(v) - \mathcal{Y}(\alpha u + (1-\alpha)v) =$
 $= -(\mathcal{Y}(v + \alpha(u-v)) - \mathcal{Y}(v)) + \alpha(\mathcal{Y}(u) - \mathcal{Y}(v)) \stackrel{\text{групп.}}{=} -\langle \mathcal{Y}'(v), \alpha(u-v) \rangle + \alpha(\mathcal{Y}(u) - \mathcal{Y}(v))$
 $\leq -\langle \mathcal{Y}'(v), \alpha(u-v) \rangle + \alpha(\mathcal{Y}(u) - \mathcal{Y}(v))$

$\frac{1}{2} \alpha(1-\alpha) \|u-v\|^2 \leq -\langle \mathcal{Y}'(v), \alpha(u-v) \rangle + \underbrace{\alpha(\mathcal{Y}(u) - \mathcal{Y}(v))}_{\alpha \rightarrow 0} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (III.2); а при $\alpha = 0 \Rightarrow$ (III.1) ■

3) Критерий оптимальности (в форме ВН)

$\Downarrow$ III.5. $\square$ $\mathcal{U}$ — вып., $\mathcal{Y}(u)$ — вып. на $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}_* \neq \emptyset$. Точка $u_* \in \mathcal{U}$, в $\mathcal{U}_*$ $\exists \mathcal{Y}'(u_*)$. Такая $u_* \in \mathcal{U}_* \Leftrightarrow \langle \mathcal{Y}'(u_*), u-u_* \rangle \geq 0, \forall u \in \mathcal{U}$.

$\blacktriangle \Rightarrow$ уже доказано (см. ∇_0 loc min и необх. усл. loc min)

$\Leftarrow$ По ∇_0 касат. п-ти $\Rightarrow \mathcal{Y}(u) \geq \mathcal{Y}(u_*) + \langle \mathcal{Y}'(u_*), u-u_* \rangle \geq \mathcal{Y}(u_*), \forall u \in \mathcal{U} \Rightarrow$ глоб. min ■

h) Примеры вып. ф-ций

$$1.1) Y(u) = \|Au - b\|^2, u \in U, A \in L(H \rightarrow F)$$

$$\alpha Y(u) + (1-\alpha) Y(v) - Y(\alpha u + (1-\alpha)v) = \alpha \|Au - b\|^2 + (1-\alpha) \cdot$$

$$\|Av - b\|^2 - \|A(\alpha u + (1-\alpha)v) - (\alpha b + (1-\alpha)b)\|^2 = \alpha \|Au - b\|^2 +$$

$$+ (1-\alpha) \|Av - b\|^2 - \alpha^2 \|Au - b\|^2 - 2\alpha(1-\alpha) \langle Au - b, Av - b \rangle$$

$$\| \|a + b\|^2 = \|a\|^2 + 2\langle a, b \rangle + \|b\|^2 //$$

$$- (1-\alpha)^2 \|Av - b\|^2 = \alpha(1-\alpha) \|Au - b\|^2 + (1-\alpha)(1-\alpha + \alpha) \cdot$$

$$\|Av - b\|^2 - 2\alpha(1-\alpha) \langle Au - b, Av - b \rangle = \alpha(1-\alpha) \|Au - b\|^2 -$$

$$\|Av - b\|^2 \geq 0 \Rightarrow Y(u) - \text{вып.}$$

$$Y'(u) = 2A^*(Au - b)$$

$$2 \langle A^*(Au_* - b), u_* - u \rangle \geq 0, u \in U$$

1.2) $Y(u) = \langle Au, u \rangle - 2\langle b, u \rangle$, где $A = A^*$, $A \in \mathcal{L}(H \rightarrow H)$, $A \geq 0$

$$\begin{aligned} & \alpha Y(u) + (1-\alpha) Y(v) - Y(\alpha u + (1-\alpha)v) = \alpha \langle Au, u \rangle + (1-\alpha) \langle Av, v \rangle \\ & - \langle A(\alpha u + (1-\alpha)v), \alpha u + (1-\alpha)v \rangle - 2\alpha \langle b, u \rangle - 2(1-\alpha) \langle b, v \rangle \\ & + 2\langle b, \alpha u + (1-\alpha)v \rangle = \alpha \langle Au, u \rangle + (1-\alpha) \langle Av, v \rangle - \alpha^2 \langle Au, u \rangle \\ & - \alpha(1-\alpha) \langle Au, v \rangle - \alpha(1-\alpha) \langle Av, u \rangle - (1-\alpha)^2 \langle Av, v \rangle - 2\alpha \langle b, u \rangle \\ & - 2(1-\alpha) \langle b, v \rangle + 2\alpha \langle b, u \rangle + 2(1-\alpha) \langle b, v \rangle = \alpha(1-\alpha) \cdot \\ & \cdot \langle Au, u \rangle + (1-\alpha) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \alpha \right) \langle Av, v \rangle - \alpha(1-\alpha) \langle Au, v \rangle - \alpha(1-\alpha) \cdot \\ & \cdot \langle Av, u \rangle = \alpha(1-\alpha) [\langle Au, u-v \rangle + \langle Av, v-u \rangle] = \alpha(1-\alpha) \cdot \\ & \cdot \langle Au - Av, u-v \rangle \geq 0 \Rightarrow \text{верн.} \end{aligned}$$

$A(u-v)$, т.к. $A \geq 0$

$$Y'(u) = (A + A^*)u - 2b = 2Au - 2b = 0 \Leftrightarrow Au = b$$

Метод Рунге

3) ∇ Вейерштрасса (g/ сеп. вып. ф-ции)

$$Y(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U \subseteq H - \text{мн.}; \quad Y_* > -\infty, U_* \neq \emptyset (?)$$

У. III.6. $\square$ H — гильб. пр-во, U — вып. и замкн. (не опр.), $J(u)$ — п/н снизу, сил. вып. на U . Тогда: 1) $J_* > -\infty$; ^{обязательно}

$$2) U_* = \{u_*\}$$

$$3) \forall \{u_k\} \text{ — мин. } \xrightarrow{\|\cdot\|} u_*,$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon \|u_k - u_*\|^2 \leq J(u_k) - J(u_*).$$

Доп. потребуем, чтобы $J(u) \in C^1(U)$

и задачу $J(u) \rightarrow \inf, u \in M(\vartheta) = \{u \in U : J(u) \leq J(\vartheta)\}$

Т.к. $u \in M(\vartheta) \Rightarrow J(u) \geq J(\vartheta) =$ мин. будет только в $M(\vartheta) \Rightarrow$ можно вместо иск. задачи решить задачу $J(u) \rightarrow \inf, u \in M(\vartheta)$

$M(\vartheta)$ — мин-во Ледера — вып.

$M(\vartheta)$ — замкн. // док-ся по опр. // : $\forall \{u_k\} \in M(\vartheta) \xrightarrow{\|\cdot\|} u \in M(\vartheta)$

П.к. $u_k \in U$ — замкн. $\Rightarrow u \in U$

$$\underbrace{J(u)}_{\substack{\downarrow k \rightarrow \infty \\ \text{п/н снизу}}} \leq \liminf J(u_k) \leq \lim J(u_k) \leq \{u_k \in M(\vartheta)\} \leq \underline{J(\vartheta)} = \underline{J(u)} \Rightarrow u \in M(\vartheta)$$

≤ 0

$$M(\vartheta) \text{ — опр.: } \frac{1}{2} \varepsilon \|u - \vartheta\|^2 \leq J(u) - J(\vartheta) - \langle J'(\vartheta), u - \vartheta \rangle \leq \frac{1}{2} \varepsilon \|u - \vartheta\|^2$$

$$\text{// Лер-во К-Б: } |\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\| //$$

$$\leq \|J'(\vartheta)\| \|u - \vartheta\| \Rightarrow \|u - \vartheta\| \leq \frac{2}{\varepsilon} \|J'(\vartheta)\|, \forall u \in M(\vartheta)$$

$\Rightarrow M(\vartheta)$ — сл. комп.

$J(u)$ — п/н снизу и сл. вып. $\Rightarrow$ слабо п/н снизу $\Rightarrow$ и слабый вариант $\square$ В. $\Rightarrow J_* > -\infty, U_* \neq \emptyset$; т.к. $J(u)$ строго вып. (т.к. сил. вып.) $\Rightarrow U_* = \{u_*\}$

$$\text{Д-м 3): По } \square \text{ касат. пл-ти } \frac{1}{2} \varepsilon \|u - u_*\|^2 \leq J(u) - J(u_*) - \langle J'(u_*), u - u_* \rangle, \forall u \in U \leq \underline{J(u) - J(u_*)}, u = u_k \Rightarrow$$

≥ 0 // крит. опт. //

$\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{u = u_k} 0$

$$\Rightarrow u_k \xrightarrow{\|\cdot\|} u_* \blacksquare$$

б) Критерии вып-ти, сил. вып-ти ф-ций

$$\gamma(u) \in C^1(U)$$

III.7 (кр. вып.-ти) $\Rightarrow U$ -вып. мн-во из H -мн-ва,
 $\gamma(u) \in C^1(U)$. Тогда $\gamma(u)$ вып $\Leftrightarrow$ (III.3) $\Leftrightarrow \gamma'(u) - \gamma'(v),$
 $u-v \geq 0, \forall u, v \in U$

III.8 (кр. см. вып. -//-. Тогда $\gamma(u)$ -см. вып $\Leftrightarrow \exists \mu > 0$
 (III.4) $\langle \gamma'(u) - \gamma'(v), u-v \rangle \geq \mu \|u-v\|^2, \forall u, v \in U$

$\Rightarrow \gamma(u)$ -см. вып., $\forall u, v \in U$.

$$\begin{cases} \gamma(u) - \gamma(v) \geq \langle \gamma'(v), u-v \rangle + \frac{1}{2} \mu \|u-v\|^2 \\ \gamma(v) - \gamma(u) \geq \langle \gamma'(u), v-u \rangle + \frac{1}{2} \mu \|v-u\|^2 \end{cases}$$

$$\langle \gamma'(v) - \gamma'(u), u-v \rangle + \mu \|u-v\|^2 \leq 0 \Rightarrow (III.4), \text{ а при}$$

$$\mu=0 \Rightarrow (III.3)$$

$\Rightarrow$ справедливо (III.4) $\Rightarrow$ см. вып.

$$\alpha \gamma(u) + (1-\alpha) \gamma(v) - \gamma(\alpha u + (1-\alpha)v) = \alpha (\gamma(u) - \gamma(u_\alpha)) +$$

$$+ (1-\alpha) (\gamma(v) - \gamma(u_\alpha)) \stackrel{u_\alpha = \alpha u + (1-\alpha)v}{=} \alpha \gamma(u_\alpha) + (1-\alpha) \gamma(u_\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \text{ф-на конечных приращений} = \alpha \int_0^1 \langle \gamma'(u_\alpha + t(u-u_\alpha)),$$

$$\gamma(u+h) - \gamma(u) = \int_0^1 \langle \gamma'(u+th), h \rangle dt //$$

$$\alpha \int_0^1 \langle \gamma'(u_\alpha + t(u-u_\alpha)), u-u_\alpha \rangle dt + (1-\alpha) \int_0^1 \langle \gamma'(u_\alpha + t(v-u_\alpha)), v-u_\alpha \rangle dt =$$

$$// u-u_\alpha = u - \alpha u - (1-\alpha)v = (1-\alpha)(u-v)$$

$$v-u_\alpha = v - \alpha u - (1-\alpha)v = -\alpha(u-v) //$$

$$= \alpha(1-\alpha) \int_0^1 \langle \gamma'(u_\alpha + t(u-u_\alpha)) - \gamma'(u_\alpha + t(v-u_\alpha)), u-v \rangle dt$$

$$// z_1 - z_2 = u_\alpha + t(u-u_\alpha) - u_\alpha - t(v-u_\alpha) = t(u-v) \Leftrightarrow u-v =$$

$$= \frac{z_1 - z_2}{t} //$$

$$= \alpha(1-\alpha) \int_0^1 \frac{1}{t} \langle \gamma'(z_1) - \gamma'(z_2), z_1 - z_2 \rangle dt \geq \alpha(1-\alpha) \int_0^1 \frac{1}{t} \mu \|z_1 - z_2\| dt$$

$$\mu t^2 \|u-v\|^2 dt = \frac{1}{2} \mu \alpha(1-\alpha) \|u-v\|^2 \Rightarrow \gamma(u) \text{ см. вып., а при}$$

$$\mu=0 \Rightarrow \gamma(u) \text{ вып.} \blacksquare$$

$$y(u) \in C^2(U)$$

IV.9. U — вып. из H -шляб., $\text{int } U \neq \emptyset$, $y(u) \in C^2(U)$. Тогда $y(u)$ — вып. $\Leftrightarrow$ (III.5) $\langle y''(u)\xi, \xi \rangle \geq 0$, $\forall u \in U$, $\forall \xi \in H$

IV.10. — // — . Тогда $y(u)$ — сил. вып. $\Leftrightarrow$ (III.6) $\exists \mu > 0$.

$$\langle y''(u)\xi, \xi \rangle \geq \mu \|\xi\|^2, \forall u \in U, \forall \xi \in H.$$

III.6 $y(u)$ — сил. вып. $\Rightarrow$ (III.6)

$\exists u \in \text{int } U$, т.е. $\forall \xi \in H \exists \varepsilon_0 > 0: u + \varepsilon \xi \in U, \forall |\varepsilon| < \varepsilon_0$. Воспользуемся IV.9 $\Rightarrow$

$$\langle y''(u + \varepsilon \xi) - y''(u), \varepsilon \xi \rangle = \{ \text{ф-ла конеч приращ.} \} = \langle y''(u + \theta \varepsilon \xi) \varepsilon \xi, \varepsilon \xi \rangle \Rightarrow \mu \varepsilon^2 \|\xi\|^2 \leq \langle y''(u + \varepsilon \xi) \xi, \xi \rangle \Rightarrow \{ \varepsilon \rightarrow 0 \}$$

$\Rightarrow$ (III.6) г/внутр.т.

$\exists u \in \text{граница } U$; в силу вып. $U \exists u_k \in \text{int } U: u_k \xrightarrow{||} u \Rightarrow \langle y''(u_k) \xi, \xi \rangle \geq \mu \|\xi\|^2 \Rightarrow \{ k \rightarrow +\infty \} \Rightarrow$ (III.6) г/границ.т.

III.6 $y(u)$ — сил. вып.

$$\langle y'(u) - y'(v), u - v \rangle = \langle y''(v + \theta(u-v))(u-v), u-v \rangle \geq \mu \|u-v\|^2 \Rightarrow \{ \text{IV.9} \} \Rightarrow y(u) \text{ — сил. вып.} \quad \theta u + (1-\theta)v \in U \quad \theta \in H \quad \theta \in H$$

Пример $y(u) = x^2 - y^2$, $u = u(x, y) \in U$, $U = \{ u \in E^2: y = 0 \}$

$$y'(u) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}, \quad y''(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\langle y''(u)\xi, \xi \rangle = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\xi_1 \\ -2\xi_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\xi_1^2 - 2\xi_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \xi < 0 \quad // \text{ не годн. критерий, т.к. } \text{int } U = \emptyset //$$

$$\langle y'(u) - y'(v), u - v \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -2y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x_2 \\ -2y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} \rangle = 2(x_1 - x_2)^2 - 2(y_1 - y_2)^2 \geq 0$$

$$2\|u - v\|^2 = 2((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)$$

Применение кр-а со 2-й производ-й

$$U = H = E^n$$

$$\langle J''(u)\xi, \xi \rangle \geq \mu \|\xi\|^2 \Leftrightarrow \langle J''(u)\xi, \xi \rangle > 0 \Leftrightarrow J''(u) > 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ все главные угловые миноры > 0 // Кр. Сильвестра

If $J''(u) \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \text{все } \underbrace{\text{и. миноры}}_{\substack{\text{пересеч. строк и} \\ \text{столбцов с одинак.} \\ \text{номерами}}} \geq 0$$

пересеч. строк и столбцов с одинак. номерами

Пример $f(u) = x^2 + 2ax + by^2 + cz^2$

+ Вып-ть: $f'(u) = \begin{pmatrix} 2x + 2a \\ 2ax + 2by \\ 2cz \end{pmatrix}$

$$f''(u) = \begin{pmatrix} 2 & 2a & 0 \\ 2a & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 2c \end{pmatrix} \begin{matrix} // \text{ симм.} \\ \geq 0 \end{matrix}$$

$$\Delta_1^1 = 2 > 0, \Delta_2^2 = 2b, \Delta_3^3 = 2c$$

$$\Delta_{12}^{12} = 4b - 4a^2, \Delta_{13}^{13} = 4c, \Delta_{23}^{23} = 4bc$$

$$\Delta_{123}^{123} = 2c(4b - 4a^2)$$

If все они ≥ 0 , то ф-ция будет вып.

Сил. вып-ть: $\Delta_1^1, \Delta_{12}^{12}, \Delta_{123}^{123}$

If все они > 0 , то ф-ция будет сил. вып.

Д-м, что применение верно

$\Rightarrow$ очевидно

$$\Leftarrow \langle J''(u)\xi, \xi \rangle > 0, \forall u \in U, \forall \xi \in H$$

// Делим на $\|\xi\|$ $\langle J''(u) \frac{\xi}{\|\xi\|}, \frac{\xi}{\|\xi\|} \rangle > 0 \Rightarrow \exists \mu^* : \langle J''(u) \frac{\xi}{\|\xi\|}, \frac{\xi}{\|\xi\|} \rangle \geq \mu^*$

$\frac{\xi}{\|\xi\|} \in S_1(0)$ — единич. сфера

Пример $J(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n^2 = \langle Ax, x \rangle$

// l_2

$$A: (x_1, x_2, \dots) \rightarrow (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$$

$$Y''(u) = A + A^* = 2A$$

$$\langle Y''(u)g, g \rangle = \langle 2Ag, g \rangle = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} g_n^2 \geq 0$$

$$g = e_n \quad (0 \dots \underbrace{1}_n \dots 0)$$

$$\frac{1}{n} > 0, \quad n \rightarrow \infty$$